Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.os 10 e 11 (Semana 6)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Método dos Momentos

Estimadores

Métodos de Estimação

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

o Método dos momentos e
o Método da Máxima verosimilhança

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos

Introduzido por Karl Pearson no início do século XX, foi o primeiro método de estimação a ser apresentado e que tem uma filosofia muito simples.

O método consiste em:

– considerar como estimadores dos parâmetros desconhecidos as soluções das equações que se obtêm igualando os momentos teóricos aos momentos empíricos.

Momentos empíricos ou Momentos amostrais

Momentos teóricos ou Momentos populacionais

É um método de aplicação geral, tendo como única condição que a distribuição tenha um número suficiente de momentos (teóricos).

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos

Sejam $\theta_1, ..., \theta_k$ parâmetros desconhecidos de uma v.a. X.
O método dos momentos consiste em igualar momentos teóricos e momentos empíricos, i.e.,

$$E[X] = m'_1 \quad c/ \quad m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$E[X^2] = m'_2 \quad c/ \quad m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
$$\vdots$$
$$E[X^k] = m'_k \quad c/ \quad m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ são os chamados momentos empíricos, calculados à custa da amostra $(x_1, ..., x_n)$.

Aquelas igualdades dão-nos estimativas que são concretização dos estimadores com as expressões correspondentes.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos: Exemplo

Considere-se $X \cap N(\mu, \sigma^2)$. Quais são os estimadores dos momentos de μ e σ^2?

Métodos dos Momentos: Exemplo

Exemplo

Consideremos $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quais os estimadores de momentos de μ e σ^2?

Tem-se :

$$\begin{array}{lcl} E[X] = \mu & \text{e} & M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \\ E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 & \text{e} & M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{array}$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \end{cases}.$$

donde

$$\mu^* = \overline{X}$$

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^{*2} \Rightarrow (\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Portanto, os estimadores são:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) S^2 \end{cases}.$$

Variância corrigida (s^2)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Métodos dos Momentos

Os cálculos não são complicados, mas no cálculo dos momentos empíricos aparecem potências de expoente elevado quando há muitos parâmetros, conduzindo a estimativas instáveis.
Por isso, como regra prática deve evitar-se recorrer ao método dos momentos para mais de quatro parâmetros.

Nota: Os estimadores obtidos pelo método dos momentos são menos eficientes do que os estimadores de máxima verosimilhança, que passamos já a apresentar.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

2

Método dos Momentos: Exercícios

Estimadores

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 1: Suponha que X1, X2, ., Xn é uma a.a. proveniente de uma distribuição exponencial com o parâmetro λ. Determine o estimador dos momentos de λ.

Exercício 1: Estimador dos Momentos

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 \leq x < \infty$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

1º Momento da Amostra: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

1º Momento da População: $E[x] = \dfrac{1}{\lambda}$

Método dos Momentos: $E[x] = \bar{x}$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_{MM}} = \bar{x}$$

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 2: Seja X1, X2, ., Xn uma a.a. que segue uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\alpha) = (\alpha+1)\cdot x^{\alpha}\ I_{(0,1)}(x) \quad \alpha > 0.$$

Encontre um estimador para α utilizando o método dos momentos.

Exercício 2: Estimador dos Momentos

Solução pelo método dos momentos: $\mu_1' = m_n$

$$\mu_1' = E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x|\alpha)\,dx = (\alpha+1)\cdot\int_0^1 x^{\alpha+1}\,dx = (\alpha+1)\cdot \left.\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_0^1$$

Logo, $\mu_1' = \boxed{\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg}\,x$
$\mathrm{cosec}^2 x$	$-\mathrm{cotg}\,x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Exercício 2: Estimador dos Momentos

Assim,

$$m_1 = \mu_1' \implies \frac{\widehat{\alpha}+1}{\widehat{\alpha}+2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}+1 &= (\widehat{\alpha}+2)\cdot \overline{X} \\
\widehat{\alpha}+1 &= \widehat{\alpha}\,\overline{X} + 2\,\overline{X} \\
\widehat{\alpha}\,(1-\overline{X}) &= 2\,\overline{X} - 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\,\overline{X} - 1}{1-\overline{X}}$$

é o estimador para α pelo métodos dos momentos.

Método dos Momentos: Exercícios

Murteira et al (2015)

3

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\Sigma_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.

c) Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.

d) Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.

e) Mostre que $T = \Sigma_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ.

Exercício 1 a)

$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$, onde $0 < \theta < 1$

Sabe-se que: $E(X) = \dfrac{1-\theta}{\theta}$

Amostra: $n = 1000$, $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$

Exercício 1 a)

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \bar{X} \Leftrightarrow 1-\theta = \bar{X}\theta \Leftrightarrow \bar{X}\theta + \theta = 1 \Leftrightarrow \theta(\bar{X}+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{X}+1}} \longrightarrow \text{Estimador MM}$$

Estimativa MM: $\tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{x}+1}$

Na amostra observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} x_i}{1000} = \frac{980}{1000} = 0.98$

Logo, a estimativa MM é: $\tilde{\theta} = \frac{1}{0.98+1} = \frac{50}{99} \approx 0.5051$

3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ, para a qual se tem $E(X)=\alpha\theta$ e $\mathrm{Var}(X)=\alpha\theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\Sigma_{i=1}^{320}x_i=22.2$ e $\Sigma_{i=1}^{320}x_i^2=535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.

Exercício 3

$X \rightarrow E(X) = \alpha\theta$ e $Var(X) = \alpha\theta^2$

Amostra: $n = 320$, $\sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$, $\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$

Método dos Momentos

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad e \quad E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$E(X^2) = ?$ $\rightarrow$ $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \Leftrightarrow E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 \Leftrightarrow E(X^2) = \alpha\theta^2 + (\alpha\theta)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E(X^2) = \alpha\theta^2 + \alpha^2\theta^2$

Exercício 3

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X} \\ E(X^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\theta = \overline{X} \\ \alpha\theta^2 + \alpha^2\theta^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\overline{X}}{\theta} \\ \left(\dfrac{\overline{X}}{\theta}\right)\theta^2 + \left(\dfrac{\overline{X}}{\theta}\right)^2\theta^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \overline{X}\theta + \overline{X}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \overline{X}\theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \overline{X}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\overline{X}} - \overline{X} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} = \dfrac{\overline{X}}{\tilde{\theta}} \\ \tilde{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n\overline{X}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} = \overline{X} \cdot \dfrac{n\overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} = \dfrac{n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \\ \tilde{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n\overline{X}} \end{cases}$$

$\downarrow$

Estimadores MM

Estimativas MM: $\tilde{\alpha} = \dfrac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$ e $\tilde{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n\bar{x}}$

Exercício 3

Da amostra observada, tem-se:

$$n = 320$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 22.2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{22.2}{320} = 0.069375$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 535.8$$

Exercício 3

Logo, as estimativas MN são:

$$\tilde{\alpha} = \frac{320 \times 0.069375^2}{535.8 - 320 \times 0.069375^2} \approx 0.00288$$

$$\tilde{\theta} = \frac{535.8 - 320 \times 0.069375^2}{320 \times 0.069375} \approx 24.06576$$

4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ. Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.

   a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.

   b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ.

   c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.

Exercício 4 a)

Saco com θ bolas (numeradas de 1 a θ)

Amostra com reposição $(n=3)$: 13, 5, 7

X - v.a. do nº obtido na extracção

$X \sim$ Uniforme Discreta $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\theta} \quad (x = 1, 2, \dots, \theta)$, $E(x) = \frac{\theta+1}{2}$

Pela estimação MM:

$$\underbrace{E(X)}_{\frac{\theta+1}{2}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}_{\bar{X}} \Leftrightarrow \frac{\theta+1}{2} = \bar{X} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{\theta} = 2\bar{X} - 1} \rightarrow \text{Estimador MM}$$

Exercício 4 a)

- Estimativa MM: $\tilde{\theta} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \underbrace{\frac{13+5+9}{3}}_{\bar{x}} - 1 \iff \tilde{\theta} = 17$

(obtido da amostra observada)

-

Nota: O método momentos pode fornecer estimativas não admitíveis.

Por exemplo, se a amostra observada fosse $(1, 3, 14)$, teríamos como esti

para o nº bolas no saco

$$\tilde{\theta} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \frac{1+3+14}{3} - 1 = 11,$$

que não é possível pois observámos a bola 14!

5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{2\theta}, \ (-\theta < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.

Exercício 5

$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}$, $(-\theta < x < \theta)$, onde $\theta > 0$ → Amostra casual : n

Estimação MM

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

• $E(X) = ?$ → $E(X) = \int_{D_x} x\, f(x|\theta)\, dx = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta}\, dx = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} x\, dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\theta}^{\theta} =$

$$= \frac{1}{2\theta}\left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{(-\theta)^2}{2}\right] = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2\theta} \times 0 = 0$$

É impossível obter estimador MM pelo 1º momento populacional. Vamos então recorrer aos segundos momentos.

Exercício 5

$$E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$$

• $$E(X^2) = \int_{D_x} x^2 f(x|\theta)\, dx = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \frac{1}{2\theta}\, dx = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x^2\, dx = \frac{1}{2\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\left[\frac{\theta^3}{3} - \frac{(-\theta)^3}{3}\right] = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{1}{2\theta} \times \frac{2\theta^3}{3} = \frac{\theta^2}{3}$$

ogo,

$$X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \Leftrightarrow \frac{\theta^2}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \Leftrightarrow \theta^2 = \frac{3\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \Rightarrow \boxed{\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{3\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}} \longrightarrow \text{Estimador M}$$

: Porque é que a outra solução não é possível ?

Método da Máxima Verosimilhança

4

Estimadores

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em estimadores e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

o Método dos momentos e
o Método da Máxima verosimilhança

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um parâmetro θ, desconhecido, e $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, ..., x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verosimilhança da amostra** e representa-se por $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, ..., x_n)$ a

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \qquad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|\theta) \quad \text{caso discreto}$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança

O método da máxima verosimilhança, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como estimativa de θ o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, face a uma amostra observada $(x_1, \ldots, x_n)$.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Log-Verosimilhança

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a versomilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítimca é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que $\quad \dfrac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, ..., x_n)$ é **a estimativa de máxima verosimilhança,** que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

MMV: Exemplo 1

Considere-se X ∩ P(λ) e a amostra (0, 0, 2, 5, 3, 1). Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de λ?

MMV: Exemplo 1

Exemplo $X \sim Poi(\lambda)$

$(0, 0, 2, 5, 3, 1)$

emv(λ) [estimativa de máxima verossi-

milhança de λ com base nesta amostra)

Passo 1 : $\mathcal{L}(\lambda; 0, 0, 2, 5, 3, 1) =$

$$= \prod_{i=1}^{6} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}\right]$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{5}}{5!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{3}}{3!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}\right]$$

$$= e^{-6\lambda}\frac{\lambda^{11}}{2!\,5!\,3!\,1!} \equiv g(\lambda)$$

Slides Professora Claúdia Nunes

MMV: Exemplo 1

Passo 2 $\quad g'(\lambda) = \dfrac{-6e^{-6\lambda}\lambda^{11} + 11e^{-6\lambda}\lambda^{10}}{2!\,3!\,5!\,1!}$

$= 0 \iff -6\lambda + 11 = 0 \iff \lambda = \frac{11}{6}$

$g''(\lambda) = 36e^{-6\lambda} \ldots\ldots \Big|_{\lambda = \frac{11}{6}} < 0$

$emv(\lambda) = \frac{11}{6}$

Passo 2*: Em vez de maximizar $g(\lambda)$ vamos maximizar $\log g(\lambda)$

$g(\lambda) = \dfrac{e^{-6\lambda}\lambda^{11}}{0!\,2!\,5!\,3!\,1!}$

$\ln g(\lambda) = -6\lambda + 11\log\lambda - \log(\quad)$

$[\ln g(\lambda)]' = -6 + \frac{11}{\lambda}$

$[\ln g(\lambda)]'' = -\frac{11}{\lambda^2} < 0, \forall \lambda$

emv: $-6 + \frac{11}{\hat{\lambda}} = 0 \iff \boxed{\hat{\lambda} = \frac{11}{6}}$

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$;
2. $y = c \Rightarrow y' = 0$, onde k é uma constante real;
3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
4. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u', (a > 0, a \neq 1)$
6. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
7. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$
8. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}u'$
9. $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
10. $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$
11. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\sin u$
12. $y = \tan u \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$, desde que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
13. $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'\csc^2 u$, desde que $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

MMV: Exemplo 2

Considere-se a v.a. $X \cap \text{Exp}(\mu)$ e a amostra (1.2, 0.5, 3). Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de μ?

MMV: Exemplo 2

Exemplo 2 : $X \sim Exp(\mu)$ $\quad f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, x \geq 0$

amostra: $(1.2;\ 0.5;\ 3)$

emv(μ) = $\hat{\mu} = \frac{3}{1.2+0.5+3}$

Como X é v.a. contínua:

- $\mathcal{L}(\mu; x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3} \mu e^{-\mu x_i} =$

$$= \mu^3 e^{-\mu \sum x_i} = \mu^3 e^{-\mu(1.2+0.5+3)}$$

- $\ln \mathcal{L}(\mu) = 3 \ln \mu - 4.7 \mu$

$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]' = \frac{3}{\mu} - 4.7 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4.7}$$

$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]'' = -\frac{3}{\mu^2} < 0, \ \forall \mu$$

$\Rightarrow$ e.m.v. $(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{4.7}$

Slides Professora Claúdia Nunes

Propriedade Fundamental dos EMV: Invariância

Propriedade fundamental dos EMV: Invariância

$$EMV(h(\theta)) = h(EMV(\theta))$$

exemplo:

$$EMV(\lambda) = \overline{X}$$

$$EMV(\ln \lambda) = \ln(EMV(\lambda)) = \ln \overline{X}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

5

Estimadores

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

3. Considere uma população com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p, com $0 < p < 1$.
   a) Derive o estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro p.
   b) Foi obtida uma amostra de dimensão $n = 3$, cujos valores observados foram (1, 1, 0).
      i. Esboce o gráfico da função de verosimilhança e interprete-o.
      ii. Forneça uma estimativa para p com base no método da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

a) Função de probabilidade (f. p.):

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1, \text{com } 0 < p < 1.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p).$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

Condição de 1ª ordem:

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(p))}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{p}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - p\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - pn = 0 \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}.$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 \ln L\,(p\,;x)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} + \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)(-1)}{(1-p)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{(1-p)^2} < 0,$$

pois $x_i \geq 0, p^2 > 0, n > 0, (1-p)^2 > 0$ e $n \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$ pois $x_i = 0$ ou 1.
Portanto, o estimador de máxima verosimilhança é:

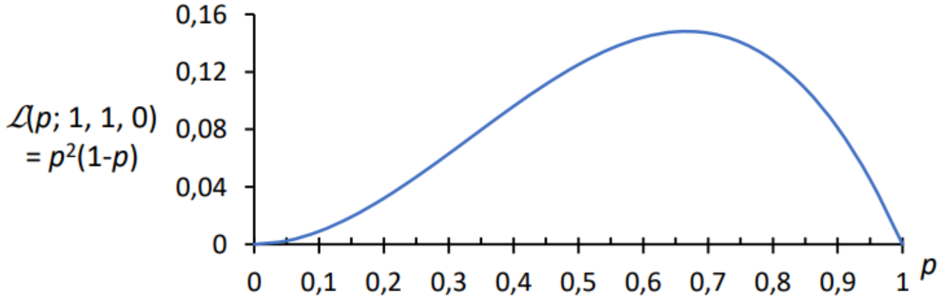
$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 b) i e ii: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) i) Substituindo em $\mathcal{L}(p)$, (x_1, x_2, x_3) pelos valores observados na amostra, $(1,1,0)$, obtemos,

$$\mathcal{L}(p) = p^2(1-p).$$



A função de verosimilhança atinge o seu valor máximo quando o p se situa perto de 0,65, sendo este o valor de p mais provável que deu origem à observação desta amostra.

ii) $\hat{p} = \dfrac{2}{3} = 0{,}6667$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a. a. de uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu;\ \sigma)$. Estime os parâmetros μ e σ pelo método:

b) Da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) Função densidade de probabilidade (f. d. p.):

$$f(x;\ \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < \mu < +\infty, \qquad \sigma > 0.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\mu\,,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln\left(\mathcal{L}(\mu,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{2}\left(\ln(2) + \ln(\pi) + \ln(\sigma^2)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\mu\right) = 0 \\[2ex] -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \dfrac{2}{4\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \\[2ex] -n\sigma^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} \\[2ex] \sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\[2ex] \sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\overline{x})}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\[2ex] \sigma^2 = \left(\dfrac{n-1}{n}\right) s^2 \end{cases}$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu^2} = -\dfrac{1}{2\sigma^2} 2n < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \dfrac{n}{2} \dfrac{1}{\sigma^4} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} < 0 \end{cases},$$

pois $n > 0, \sigma^2 > 0, \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} > \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^4}$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Portanto, os estimadores de máxima verosimilhança obtidos foram:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{n-1}{n} S^2 \end{cases}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

Murteira et al (2015)

6

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\Sigma_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.

c) Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.

d) Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.

e) Mostre que $T = \Sigma_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ.

Exercício 1

$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, onde $0 < \theta < 1$

Sabe-se que: $E(x) = \dfrac{1-\theta}{\theta}$

Amostra: $n = 1000$, $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$

Exercício 1 b)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i} = \theta^n (1-\theta)^{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}^{n\bar{x}}} = \theta^n (1-\theta)^{n\bar{x}} \qquad (0<\theta<1)$$

$$\ell(\theta) = \ln[L(\theta)] = \ln[\theta^n (1-\theta)^{n\bar{x}}] = \ln(\theta^n) + \ln[(1-\theta)^{n\bar{x}}] = n\ln(\theta) + n\bar{x}\ln(1-\theta) \qquad (0<\theta<1)$$

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \frac{n\bar{x}}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow n(1-\theta) = n\bar{x}\theta \Leftrightarrow n - n\theta = n\bar{x}\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\bar{x}\theta + n\theta = n \Leftrightarrow \theta(n\bar{x}+n) = n \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{n\bar{x}+n} \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{n(\bar{x}+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}+1}$$

Exercício 1 b)

$$\frac{d^2 \ell(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{n\bar{x}}{(1-\theta)^2} = -\underbrace{\left(\frac{n}{\theta^2} + \frac{n\bar{x}}{(1-\theta)^2}\right)}_{>0} < 0 \quad \checkmark$$

Logo, o estimador MV é: $\hat{\theta} = \dfrac{1}{\bar{x}+1}$.

Exercício 1 c)

$E(x) = \frac{1-\theta}{\theta}$ é uma função de θ

Logo, pela propriedade da invariância dos estimadores MV, obtém-se:

$$\hat{E}(x) = \widehat{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)} = \frac{1-\hat{\theta}}{\hat{\theta}} = \frac{1 - 50/99}{50/99} = 0.98$$

7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.

   a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para λ.

   b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.

   c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.

Exercício 7 a)

X - v.a. tempo resposta a uma questão, em minutos

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x>0)$, onde $\lambda > 0$

Amostra: $n = 40$, $\sum_{i=1}^{40} x_i = 480$

Exercício 7 a)

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{\sum_{i=1}^{n}(-\lambda x_i)} = \lambda^n e^{-\lambda \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}^{n\bar{x}}} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}} \quad (\lambda > 0)$$

$$\ell(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = \ln(\lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}) = \ln(\lambda^n) + \ln(e^{-\lambda n \bar{x}}) = n \ln(\lambda) - \lambda n \bar{x} \quad (\lambda > 0)$$

$$\frac{d\ell(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - n\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} = n\bar{x} \Leftrightarrow \lambda n \bar{x} = n \Leftrightarrow \lambda = \frac{n}{n\bar{x}} \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\frac{d^2\ell(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \checkmark$$

ogo, o estimador MV é: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

Exercício 7 b)

Quer-se estimativa MV para:

$$P(X<15) = \int_0^{15} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{15} = -e^{-15\lambda} - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-15\lambda}$$

Recorrendo à propriedade da invariância dos estimadores MV, tem-se que:

$$\hat{P}(X<15) = 1 - e^{-15\hat{\lambda}}$$

Sabendo que $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ e que da amostra tem-se: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i}{40} = \frac{480}{40} = 12$, obtém-se: $\hat{\lambda} =$

Logo,

$$\hat{P}(X<15) = 1 - e^{-\frac{15}{12}} \approx 0.7135 \quad (71.35\%)$$

Exercício 7 c)

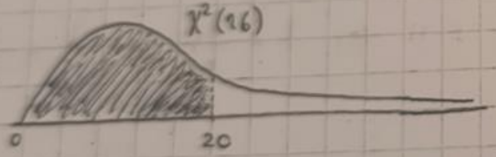
Tempo a responder a oito questões (em minutos): $\sum_{i=1}^{8} X_i$. Logo, quer-se:

$$P\left(\sum_{i=1}^{8} X_i \le 120\right)$$

Como $X_i \sim Ex(\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} X_i \sim G(8,\lambda) \Rightarrow \underbrace{2\lambda \sum_{i=1}^{8} X_i}_{Y} \sim \chi^2(2\times 8) \Rightarrow Y \sim \chi^2(16)$

Logo, recorrendo à propriedade da invariância dos estimadores MV, obtém-se:

$$\hat{P}\left(\sum_{i=1}^{8} X_i \le 120\right) = P\left(2\hat{\lambda} \sum_{i=1}^{8} X_i \le 2 \times \frac{1}{12} \times 120\right) = P\left(\underset{\downarrow \atop \chi^2(16)}{Y} \le 20\right) \approx 0.78$$



8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas, X, segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n = 10,\ \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.

Exercício 8

X - v.a. tempo reparação, em minutos

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\longrightarrow$ Amostra: $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 846$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607$

Quer-se $\hat{P}(X < 83)$.

Porque $P(X<83)$ é uma função de μ e σ^2, temos de recorrer à propriedade da invariância dos estimadores MV.

Exercício 8

1º) Estimação MV de μ e σ^2

O método MV gera as estimativas: $\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Então, pelos dados da amostra obtém-se:

- $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{846}{10} = 84.6$

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) =$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}.n\bar{x} + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{71607}{10} - 84.6^2 = 3.54$$

Exercício 8

2º) Aplicação da propriedade da invariância dos estimadores MV

$\hat{P}(X<83) \approx 0.1976 \longrightarrow$ normalcdf$(-10^{99}, 83, 84.6, \sqrt{3.54})$

$\downarrow$

$N(84.6, 3.54)$

Isto é, recorrendo à Tabela 4,

$$\hat{P}(X<83) = P\left(\frac{X-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} < \frac{83-84.6}{\sqrt{3.54}}\right) = P(Z<-0.85) = \Phi(-0.85) = 1-\Phi(0.8$$

$$= 1 - 0.8023 = 0.1977$$

Obrigada!

Questões?